不確実性下における需要処理配分問題 (不確実なモデルによる動的計画理論の課題とその展望)

北尾, 匡史; 北條, 仁志; 仲川, 勇二; 寺岡, 義伸

数理解析研究所講究録 1207 巻 2001 年 22-32

不確実性下における需要処理配分問題

関西大学情報処理センター 北尾匡史(Masachika KITAO)
大阪府立大学総合科学部 北條仁志(Hitoshi HOHJO)
関西大学総合情報学部 仲川勇二(Yuji NAKAGAWA)
大阪府立大学総合科学部 寺岡義伸(Yoshinobu TERAOKA)

1. モデルと定式化

ある地域内に m 個の需要点と呼ばれる点と n 個の施設が散在している．そして需要点と施設は固定されているものとする．需要点 i では，rate γ_i をもつポアソン過程に従って要求が発生する．この要求は全需要点に対して共通の種目の要求となっており，発生の仕方は各需要点に関して独立であるものとする($i=1,\cdots,m$)．各需要点で要求が発生するとこの要求を処理するため，施設 j へ送る($j=1,\cdots,n$)．需要点 i から施設 j へ要求を送るに際しては，d_{ij} の時間がかかるものとし，また施設 j では各要求に対して rate λ_j の指数分布に従って処理されるものとする．

ここで我々の問題は，rate γ_i で発生する需要点 i での要求を n 個の施設の中のどれに送って処理すると最も短い時間で処理できるかということである．すなわち，需要点 i で発生した要求をどの割合で施設 j へ送るかを考える．そこで，

x_{ij}= 需要点 i で rate γ_i のポアソン過程で発生した要求のうち施設 j へ配分

される rate

とすると，

$$\begin{aligned} &x_{i1}+\cdots\cdots+x_{in}=\gamma_i, \\ &x_{i1}\ge 0,\cdots\cdots,x_{in}\ge 0, \end{aligned} \quad (i=1,\cdots\cdots,m) \tag{1}$$

を満足する x_{ij} を決定する問題ということになる．そうすると施設 j への要求の到着は到着率

$$x_j=x_{1j}+\cdots\cdots+x_{mj}\ ;\ j=1,\cdots\cdots,n \tag{2}$$

をもつポアソン到着ということになり，各 j での処理時間も rate λ_j をもつ指数分布に従うので，要求が発生してから処理を開始するまでの平均所要時間は待ち行列における M/M/1 待ちシステムの期待待ち時間と需要点から施設への移動時間として評価することができる．目的は，このシステム全体で発生した要求の処理完了までの期待時間を最小にするような配分 $x_{ij}\ge 0$，ただし $i=1,\cdots\cdots,m\ ;\ j=1,\cdots\cdots,n$ を決定することとなる．

2. 一般的定式化

あるシステム内で複数の要求が発生し，これらの要求を複数の施設で処理しようとする場合，システム全体としての要求処理完了までの時間を最小にするとは，要求発生場所か

ら施設までの移動時間を含め処理の待ち時間と処理に要する時間の和が最も長くかかりそうな部所を最小時間ですませるような要求配分を考えることに他ならない．そう考えると我々のモデルは下記のように定式化できる．

$w_j =$ 施設 j での待ち時間を示す確率変数

$S_j =$ 施設 j での処理時間を示す確率変数

$d_{ij} =$ 需要点 i から施設 j への移動時間

とすると，

$$\min_X \max_{i,j} \{E(W_j + S_j) + u(x_{ij})d_{ij}\}, \tag{3}$$

ここに，$E(Z)$ は確率変数 Z の期待値を意味し，$u(\cdot)$ は

$$u(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases}$$

である．また，X は制約条件を満足する mn 組の配分 $x_{ij} > 0$ 全体の集合である（$i = 1, \cdots\cdots, m$ ； $j = 1, \cdots\cdots, n$）.

上記の定式化は，要求の発生や処理がポアソン過程に従うことを限定せず，独立性さえ仮定すればどのような確立法則に対しても通用できる定式化である．要求の発生や処理がポアソン過程に従うことに限定した場合の形式で表現してみよう．W_j を M/M/1 待ち時間とすると，

$$E(W_j) = \frac{x_j}{\lambda_j(\lambda_j - x_j)} \tag{4}$$

であることが知られており，これに伴うトラフィック条件として

$$x_j < \lambda_j$$

が課せられることも知られている．従って制約条件として

$$x_{1j} + \cdots\cdots + x_{mj} = x_j < \lambda_j \tag{5}$$

が要請される．

また，後の議論のため，

$$R = \gamma_1 + \cdots\cdots \gamma_m ; M = \lambda_1 + \cdots\cdots + \lambda_m$$

とおくと，(1),(2),(5)より

$$R < M \tag{6}$$

を前提とするのは言うまでもない．次に施設 j での処理時間も rate λ_j の指数分布を仮定してあるので

$$E(S_j) = \frac{1}{\lambda_i} \tag{7}$$

となる．(1),(2),(3),(4),(5),(7) をまとめると，我々の問題は次のような数理計画問題として表現することができる．

$$\min_{x_{ij}} \max_{i,j} \left[\frac{1}{\lambda_j - x_j} + u(x_{ij}) d_{ij} \right]$$

subject to

$$\begin{aligned} & x_{i1} + \cdots\cdots + x_{in} = \gamma_i, \\ & x_{1j} + \cdots\cdots + x_{mj} = x_j < \lambda_j, \\ & x_{ij} \geq 0 \\ & i = 1, \cdots\cdots, m \;\; ; \;\; j = 1, \cdots\cdots, n \end{aligned} \tag{A}$$

ここに，

$$u(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

これは，非線形の数理計画問題であり，一般的取扱いは非常に難しい．
以後，需要点から施設への移動時間がそれらの位置に関係せず一定と考えられる場合，および移動時間は需要点と施設の位置に依存するが施設の数が２の場合の特別な場合について考察する．ここで，需要点全体の集合を D で，施設全体の集合を F で表すこととする．すなわち，

$$D = \{1, \cdots\cdots n\} \quad ; \quad F = \{1, \cdots\cdots m\}.$$

３．移動時間が一定の場合

本節では，需要点から施設への移動時間がそれらの位置に関係せず一定の場合，すなわち

$$d_{ij} = d \quad \text{for all} \;\; (i,j) \in D \times F \tag{8}$$

となっている場合を考察する．このとき問題(A) の目的関数は，

$$\min_{x_{ij}} \max_{i,j} \left[\frac{1}{\lambda_j - x_j} + u(x_{ij}) d \right]$$

$$= \min_{x_j} \max_{j} \left(\frac{1}{\lambda_j - x_j} \right) + d \tag{9}$$

となる．これは，とりあえずx_jを求める問題である．そこで，

$$\lambda_1 - x_1 = \cdots\cdots = \lambda_n - x_n = \text{ const}$$

を満足する $x_1,\cdots,x_n$ をそれぞれ $x_1^*,\cdots,x_n^*$ とおくと，

すなわち

$$x_1 + \cdots\cdots + x_n = R$$

であるから

$$x_j^* = \lambda_j - \frac{M-R}{n} \quad , \quad j = 1,\cdots\cdots,n \tag{10}$$

とおくと，

$$\min_{x_j} \max\left(\frac{1}{\lambda_j - x_j}\right) = \frac{1}{\lambda_j - x_j^*}$$

を得る．なぜならば(10)を満足しない x_j に対しては少なくとも１つ

$$\frac{1}{\lambda_k - x_k} > \frac{1}{\lambda_j - x_j^*} = \frac{n}{M-R} \tag{11}$$

となる x_k が存在する．もしそうでなければ，すべてのjに対して，

$$\lambda_j - x_j \le \frac{M-R}{n}$$

であり，さらにあるkに対して

$$\lambda_k - x_k < \frac{M-R}{n}$$

でなければならない．そうすると

$$\sum_{j=1}^{n} x_j < R$$

となってしまうからである．(9),(10),(11)を比較すると(10)で与えられるx_j^*が目的関数を満足する施設jへの配分の和であることがわかる．

さて，(10)によって$x_1^*,\cdots,x_n^*$が求まると，需要点Ｃから施設jへの配分x_{ij}は(1)と(2)の両方を満足しなければならないから，需要点から施設への輸送費が一定である輸送問題

D＼F	1	2	…	j	…	n	計
1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1j}	…	x_{1n}	γ_1
2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2j}	…	x_{2n}	γ_2
…	…	…	…	…	…	…	…
i	x_{i1}	x_{i2}	…	x_{ij}	…	x_{in}	γ_i
…	…	…	…	…	…	…	…
m	x_{m1}	x_{11}	…	x_{mj}	…	x_{mn}	γ_m
計	x_1^*	x_2^*	…	x_j^*	…	x_n^*	R

の解より得られることとなる．この解は無数に存在するが，北西隅法による解が簡便な解といえよう．

4．施設の数が２のとき

本節では，需要点の個数はmであるが施設の個数は２という簡単な場合を考察する．したがって，

$$D = \{1,\cdots\cdots,m\} \ ; \ F = \{1,2\}.$$

ここで，Dの中で施設１への配分を行う需要点の集合D_1と施設２への配分を行う需要点の集合D_2を定義する．すなわち，

$$D_1 = \{i \mid x_{i1} > 0\} \ ; \ D_2 = \{i \mid x_{i2} > 0\}$$

もちろん，$D_1 \cap D_2 = \phi$ とは限らない．このことは，２つの施設の両方に配分を行う需要点の可能性も考慮に入れていることを意味する．
そうすると，

$$x_1 = \sum_{i \in D_1} x_{i1} < \lambda_1 \ ; \ x_2 = \sum_{i \in D_2} x_{i2} < \lambda_2$$

となる．さらに実行可能なD_1とD_2に対して

$$d_1 = \max_{i \in D_1} d_{i1} \ ; \ d_2 = \max_{i \in D_2} d_{i2}$$

と定義する．

そうすると，問題(A)への n=2 に対する暫定問題として

$$\min_{x_{ij}} \max\left(\frac{1}{\lambda_1 - x_1} + d_1, \frac{1}{\lambda_2 - x_2} + d_2\right)$$

subject to

$$\begin{aligned}
&x_{i1} + x_{i2} = \gamma_i \\
&\sum_{i \in D_1} x_{i1} = x_1 < \lambda_1 \\
&\sum_{i \in D_2} x_{i2} = x_2 < \lambda_2 \\
&x_1 + x_2 = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i = R \\
&x_{ij} > 0 \\
&i = 1,\cdots\cdots,m \ ; \ j = 1,2
\end{aligned} \tag{T}$$

が考えられる．これは，よく観察すると x_{ij} を決定する以前に x_1 と x_2 を決定する問題となっていることがわかる．そして，d_1 と d_2 も可能な限り小さくなるように D_1 と D_2 の元を選ぶべきこともわかる．次に，

$$x_1 + x_2 = R$$

であるから，問題(T)の目的関数を $u(x_1)$ とおくと

$$u(x_1) = \min_{x_1} \max\left(\frac{1}{\lambda_1 - x_1} + d_1, \frac{1}{\lambda_2 + x_1 - R} + d_2\right)$$

と書ける．そこで，x_1 に関する方程式

$$\frac{1}{\lambda_1 - x_1} + d_1 = \frac{1}{\lambda_2 + x_1 - R} + d_2 \tag{12}$$

は区間 $(R - \lambda_2, \lambda_1)$ で必ず唯一根を持つから，これを x_1^* とおくと，

$$u_1(x_1) = \min_{x_1} \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda_2 + x_1 - R} + d_2, & R - \lambda_2 < x_1 \leq x_1^* \\ \dfrac{1}{\lambda_1 - x_1} + d_1, & x_1^* \leq x_1 < \lambda_1 \end{cases} \tag{13}$$

したがって，このx_1^*が問題(T)の制約条件を満たしているならば，このx_1^*と$x_2^* = R - x_1^*$により構成される配分$x_{ij} > 0$が問題(T)の解ということになり，このときの目的関数の値は，

$$u_1(x_1^*) = \frac{1}{\lambda_1 - x_1^*} + d_1 = \frac{1}{\lambda_2 + x_1^* - R} + d_2$$

となる．また，問題(T)は我々の最終的な問題(A)の暫定問題であることを考えると，

$$\max(d_1, d_2) = \max_i \min_j d_{ij}$$

で与えられることもわかる．そして，上記の値が定まると(13)式よりd_1とd_2のどちらが上記の値に一致しても，他方は可能な限り小さい方が$u_1(x_1^*)$を減少させることもわかる．d_1とd_2が定まると(13)式により目的関数の値が求まるから，第1段階としての問題(T)の　D_1とD_2の設定は，

$$x_1 = \lambda_1 - \frac{M-R}{2} \ ; \ x_2 = \lambda_2 - \frac{M-R}{2}$$

を満たす配分x_{ij}をもとに行い，その後(12)式の根として与えられるx_1^*とx_2^*に従って修正を施せばよいこともわかる．

以上の考察のもとに，以下のような手順が得られる．

解法の手順

1．まず，$\min_j d_{ij}$ を求め，下記のように非減少順に並べる．

$$d_{[1]} \le d_{[2]} \le \cdots\cdots \le d_{[m]}$$

2．$d_{[i]}$に対応する施設の番号を$[j]$とおき，

$$[j] = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} \Rightarrow x_{[i]1} = \begin{Bmatrix} \gamma_i \\ 0 \end{Bmatrix} \ ; \ x_{[i]2} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \gamma_i \end{Bmatrix}$$

とおく．

3．x_1° と x_2° を

$$x_1^\circ = \lambda_1 - \frac{M-R}{2} \ ; \ x_2^\circ = \lambda_2 - \frac{M-R}{2}$$

により定める．

4．$d_{[i]m}$ の大きいほうから順に $\sum_i^m x_{[i]1}$ を計算し，

$$\sum_{i=k}^{m} x_{[i]1} \geq x_1^{\circ} \quad \text{あるいは} \quad \sum_{i=k}^{m} x_{[i]2} \geq x_2^{\circ}$$

を満足する最大の k を k° とする.

5．k° が $\sum x_{[i]1}$ に対して得られるものならば,

$$D_1 = \{i \mid x_{[i]1} > 0, i = k^{\circ}, \cdots\cdots, m\} \;,\; D_2 = D - D_1$$

とし，逆に $\sum x_{[i]2}$ に対して得られるものならば

$$D_1 = \{i \mid x_{[i]2} > 0, i = k^{\circ}, \cdots\cdots, m\} \;,\; D_1 = D - D_2$$

とする.

6．ここで，$d_1 = \max_{i \in D_1} d_{i1}$ ； $d_2 = \max_{i \in D_2} d_{i2}$ とおき,

$$\frac{1}{\lambda_1 - x_1} + d_1 = \frac{1}{\lambda_2 + x_1 - R} + d_2$$

の根を求め，これを x_1^* とおく．また，$x_2^* = R - x_1^*$ とする.

7．$x_1^* > 0$ のとき，D_1 および D_2 の中で移動時間 d_{i1} と d_{i2} の小さいほうから順に適当に入れ換えたり，γ_i を分割することにより,

$$\sum_{i \in D_1} x_{i1} = x_1^* \;；\; \sum_{i \in D_2} x_{i2} = x_2^*$$

$$x_{i1} \geq 0 \;,\; i \in D_1 \quad ； \quad x_{i2} \geq 0 \;,\; i \in D_2$$

を満足する $x_{ij} \geq 0$ を求める.（北西隅法が使える.）

8．$x_i^* \leq 0$ のとき,

$$\frac{1}{\lambda_1 - R} + d_1 \begin{Bmatrix} < \\ > \end{Bmatrix} \frac{1}{\lambda_2 - R} + d_2 \Rightarrow \begin{Bmatrix} x_{i1} = \gamma_i, x_{i2} = 0 \\ x_{i1} = 0, x_{i2} = \gamma_i \end{Bmatrix}$$

とする.

この手順に従うと，目的関数の値 v^* は

$$v^* = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda_1 - x_1^*} + d_1 = \dfrac{1}{\lambda_2 - x_2^*} + d_2, & x_i^* > 0 \\ \min\left(\dfrac{1}{\lambda_1 - R} + d_1, \dfrac{1}{\lambda_2 - R} + d_2\right), & x_i^* \leq 0 \end{cases}$$

5．簡単な例

まず最初に，需要点は４点，施設は２施設あり

$$\gamma_i = 1 \;,\; i = 1,\cdots\cdots,4$$

$$\lambda_j = 2.5 \;,\; j = 1,2$$

のポアソン発生とポアソン処理，そして移動時間は，

$j \backslash i$	1	2	3	4
1	0	1	3	4
2	3	2	2	1

で与えられている場合を扱う． $\min_j d_{ij}$ を小さいほうから順に並べると

$\min_j d_{ij}$	0	1	2
i	1	2，4	3
j	1	1，2	2

であり， $x_1^\circ = x_2^\circ = 2$ となるから，暫定的に

$$D_2 = \{3,4\} \text{ したがって } D_1 = \{1,2\}$$

が得られ

$$d_1 = 1 \;;\; d_2 = 2$$

を得る．そうすると

$$\frac{1}{2.5 - x_1} + 1 = \frac{1}{2.5 - (4 - x)} + 2$$

より $x_1^* = 2.22$ ， $x_2^* = 1.78$ となるから，輸送問題

$i \backslash j$	1	2	γ
1	x_{11}	x_{12}	1
2	x_{21}	x_{22}	1
3	x_{31}	x_{32}	1
4	x_{41}	x_{42}	1
x_j^*	2.22	1.78	4

を北西隅法によって解くと，最適解は，

$$x_{11}=1 \;,\; x_{21}=1 \;,\; x_{31}=0.22 \;,\; x_{41}=0$$

$$x_{12}=0 \;,\; x_{22}=0 \;,\; x_{32}=0.78 \;,\; x_{42}=1$$

となる．また，このとき目的関数の値 v^* は

$$v^*=4.75$$

もし，$\gamma_1=\gamma_2=1.2$ ，$\gamma_3=\gamma_4=1$ とすると，まったく同様にして $x^*=2.24$ が得られ，

$$x_{11}=1.2 \;,\; x_{21}=1.04 \;,\; x_{31}=x_{41}=0$$

$$x_{12}=0 \;,\; x_{22}=0.16 \;,\; x_{32}=x_{42}=1$$

また

$$v^*=4.85$$

となる．

次に，需要点が６点，施設が２施設あり

$$\gamma_i=1 \;,\; i=1,\cdots\cdots,6$$

$$\lambda_j=4 \;,\; j=1,2$$

そして

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	5	6	7	8	9	10
2	6	7	8	9	10	11

が移動時間となっている場合を扱う．$\min_i d_{ij}$ は上の表の第１段で与えられ

$$x_1^{\circ}=3 \ , \ x_2^{\circ}=3$$

であるから，暫定的に

$$D_1=\{4,5,6\} \ \text{したがって} \ D_2=\{1,2,3\}$$

となり，

$$d_1=10 \ , \ d_2=8$$

を得る．そうすると，

$$\frac{1}{4-x_1}+10=\frac{1}{4-(6-x)}+8 \ , \ 2<x_1<4$$

より，$x_1^{*}=2.31$ が得られ，$x_2^{*}=3.69$ より同様にして

$$x_{11}=x_{21}=x_{31}=0 \ , \ x_{41}=0.31 \ , \ x_{51}=x_{61}=1$$

$$x_{21}=x_{22}=x_{32}=1 \ , \ x_{42}=0.69 \ , \ x_{52}=x_{62}=0$$

が解となる．この時，目的関数の値は

$$v^{*}=10.59$$

となる．

参考文献

Berman, O. and Larson, R. (1985) Optimal 2-Facility Network Districting in the Presence of Queuing, Transpotation Science, v19, p.261-277.

Cooper, R. B. (1990) Queuing theory. In Handbooks in Operations Research and Management Science, 2, D. P Heyman and MJ. Sobel (eds). North-Holland, New York.